特異測度の下での間隙三角級数の挙動について(Martingaleに関連する諸問題)

福山, 克司

数理解析研究所講究録
第 783 巻 1992 年 98-117

特異測度の下での間隙三角級数の挙動について

筑波大学数学系 福山克司 (Katusi Fukuyama)

0. 間隙三角級数のある種の特異測度の下での中心極限定理は Hadamard 間隙条件を仮定した上で Kaufman [11] 及び高橋茂先生 [26], [30] により示されています. この小論では間隙条件を高橋間隙条件に緩め中心極限定理と重複対数の法則を示した結果及び一般の間隙級数についての結果を紹介したいと思いますが, 読み易い内容とするため実際の証明は Hadamard 間隙条件の場合を中心にしてみました. 高橋間隙条件の下での証明や一般の間隙級数については筆者の [4], [5], [6] にまとめてありますので, 万が一興味のある方は参照して下されば幸いです.

1. 測度を一般にした場合の結果

ここで述べる結果は, 高橋間隙条件をみたす間隙三角級数の従う極限定理であるが, 基本となる確率測度を必ずしも Lebesgue 測度について絶対連続なものに限らず, ある種の条件をみたす特異測度の下での定理に拡張したものである.

以下 $\Omega=\mathbf{R}$ とし Ω 上の確率測度 P は次の 2 条件の何れかをみたすものとする.

$$\text{(H)} \qquad P[\omega,\omega+h]\le Mh^{\rho} \quad (\omega\in\Omega,\ h>0)$$

$$\text{(D)} \qquad |\widehat{P}|\le M|u|^{-\rho/2} \quad (u\in\mathbf{R})$$

但し M, ρ は正定数, $\widehat{P}$ は P の特性函数とする. これらの条件をみたす確率測度には Cantor 測度などの面白い例がある. 詳しくは, Kershner [9], Wiener–Wintner [29], [30] を参照されたい.

まず, これらの条件の下での間隙三角級数についての中心極限定理を述べる.

Theorem 1. P は (H) をみたすとする. 正数列 $\{\phi(j)\}$ は

$$\phi(j+1)-\phi(j)\geq dj^{-\alpha}\qquad (d>0,\ 0\leq\alpha<1/2)$$

をみたすとし, $\{\gamma_j\}$ は任意, $\{a_j\}$ は

$$A_n^2=a_1^2+\cdots+a_n^2\to\infty,\quad a_n=o\bigl(A_n n^{-\alpha}(1+\alpha\log n)^{-1}\bigr)$$

をみたすとする. このとき Lebesgue 測度について殆ど全ての $x>1$ について次の中心極限定理が成立する.

$$P\biggl(\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}a_j\sqrt{2}\cos(x^{\phi(j)}\omega+\gamma_j)\leq s\biggr)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s}e^{-u^2/2}\,du$$

ここで x の例外集合は $\{a_j\}$ に依らないように取れる.

Theorem 2. P は (H) をみたすとし, 正数列 $\{\beta_j\}$ は高橋間隙条件

$$\beta_{j+1}/\beta_j>1+cj^{-\alpha}\quad (c>0,\ 0\leq\alpha<1/2)$$

をみたすとし, $\{\gamma_j\}$ は任意, $\{a_j\}$ は定理 1 と同じ条件をみたすとする. このとき Lebesgue 測度について殆ど全ての $t\in\mathbf{R}$ について次の中心極限定理が成立する.

$$P\biggl(\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}a_j\sqrt{2}\cos(\beta_j t\omega+\gamma_j)\leq s\biggr)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s}e^{-u^2/2}\,du$$

ここで t の例外集合は $\{a_j\}$ に依らないように取れる.

Theorem 3. P は (D) をみたすとし, $\{\beta_j\}$, $\{\gamma_j\}$, $\{a_j\}$ は定理 2 と同じ条件をみたすとする. このとき次の中心極限定理が成立する.

$$P\biggl(\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}a_j\sqrt{2}\cos(\beta_j\omega+\gamma_j)\leq s\biggr)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s}e^{-u^2/2}\,du$$

定理 1 は Kaufman [8] が

$$a_j\equiv 1,\qquad \phi(j)=j,\qquad x>2$$

の場合に示した結果の拡張である. Kaufman の結果は Hadamard 間隙条件をみたす特別な場合であり, 我々の結果は

$$x^{\phi(j+1)}/x^{\phi(j)} \geq 1 + (d\log x)j^{-\alpha}$$

となるので, 高橋間隙条件を仮定していることになる.

定理 2 は高橋 [24] が Hadamard 間隙条件

$$\beta_{j+1}/\beta_j > q > 1$$

の下で示した結果の拡張であり, 定理 3 は高橋 [28] がやはり Hadamard 間隙条件の下で示した結果の拡張である.

P が [0,1] 上の Lebesgue 測度のときに定理 3 にあたる定理は (即ち高橋間隙条件の下での定理は)Erdős [3] により示され, P が $[0,2\pi]$ 上の Lebesgue 測度正の部分集合に制限し正規化した Lebesgue 測度の場合には高橋 [20] による.

これらに対応する重複対数の法則も示すことができる.

THEOREM 4, 5, 6. 定理 1, 2, 3 に於て $\{a_j\}$ のみたすべき条件を

$$A_n^2 \to \infty, \quad a_n = O\left(A_n(\log A_n)^{-8}n^{-\alpha}(1+\alpha\log n)^{-1}\right)$$

とすると重複対数の法則が成り立つ. 例えば定理 4 の結論は次のようになる.

Lebesgue 測度について殆ど全ての $x > 1$ について

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2A_n^2\log\log A_n}} \sum_{j=1}^{n} a_j\sqrt{2}\cos(x^{\phi(j)}\omega + \gamma_j) = 1 \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ. ここで x の例外集合は $\{a_n\}$ に依らないように取れる.

この結果は P が Lebesgue 測度の場合は高橋 [25], [26] により示されている.

以上は間隙三角級数についての結果だが, 三角函数を一般の函数 f にした場合には間隙性を強くする必要がある. 以下 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ は周期 2π を持ち

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi$$

をみたすものとする. Kac は大間隙条件

$$n_{k+1}/n_k \to \infty \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

を仮定して [0,1] 上の Lebesgue 測度の下での中心極限定理を示し, また高橋 [15] は重複対数の法則を示した. これらの結果は確率測度に条件 (H) または (D) を仮定した場合にも同前の如く拡張される.

THEOREM 7, 8, 9. 定理 1, 2, 3 は $\sqrt{2}\cos(\cdot)$ を上の条件をみたす $f(\cdot)$ にかえても, $\{\beta_j\}$ が大間隙条件をみたすとし, $\{a_j\}$ が

$$A_n \to \infty, \quad a_n = o(A_n) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

をみたすとしてやはり成立する. 但し, 定理 7 では, $\{x^{\phi(j)}\}$ が大間隙条件をみたすように

$$\phi(j+1) - \phi(j) \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

を仮定する.

THEOREM 10, 11, 12. 定理 7, 8, 9 の条件の下でさらに

$$A_n \to \infty, \quad a_n = O\left(A_n(\log A_n)^{-8}(\log n)^{-1}\right)$$

として重複対数の法則が成り立つ.

2. Salem–Zygmund の結果

間隙三角級数 $\{\sqrt{2}\cos(2\pi n_j\omega)\}$ の従う中心極限定理は Kac [7] により大間隙条件

$$n_{j+1}/n_j \to \infty \quad \text{as} \quad j \to \infty$$

の下で証明されたが, 今後の我々の議論は, つぎの Salem–Zygmund [17] の定理の証明が基礎になっている. この節では, まず話の出発点としてその証明を簡単な場合に限って与えてみることにする.

THEOREM A. 自然数列 $\{n_j\}$ は Hadamard 間隙条件

$$n_{j+1}/n_j > q > 1 \quad (j \in \mathbf{N})$$

をみたすとし, Ω は $[0,1]$ の Lebesgue 測度正の部分集合とする. また実数列 $\{a_j\}$ について

$$A_n^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \to \infty, \quad a_n = o(A_n) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

が成立しているものとする. このとき $\{\sqrt{2}\cos(2\pi n_j\omega)\}$ を $(\Omega, d\omega/|\Omega|)$ の確率変数列と考えて次の中心極限定理が成立する.

$$\frac{1}{|\Omega|}\left|\left\{\omega \in \Omega; \frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^n a_j\sqrt{2}\cos(2\pi n_j\omega) \le s\right\}\right| \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^s e^{-u^2/2}du.$$

ここで $|\cdot|$ は集合の Lebesgue 測度を表すものとする.

ここでは $\Omega = [0,1]$ として証明してみることとする. 以下暫くの間, 簡単のため $\zeta_j(\omega) = \sqrt{2}\cos(2\pi n_j\omega)$ と書くことにし, また見通しをよくするため $q \ge 3$ の場合だけを先に証明してしまうことにする.

中心極限定理を証明するためには, それと同値な特性函数

$$\phi_n(t) = E\exp\left(\frac{it}{A_n}\sum_{j=1}^n a_j\zeta_j\right)$$

の $e^{-t^2/2}$ への各点収束をいえばよい. (ここで $E\cdot$ は確率測度での積分 $\int_0^1 \cdot\, d\omega$ を表している.)

$\log(1+ix)$ の Taylor 展開により $e^{-ix} = (1+ix)\exp\left(-x^2/2 + O(|x|^3)\right)$ が導かれるので, これを用いると

$$\phi_n(t) = E\prod_{j=1}^n\left(1 + \frac{ita_j}{A_n}\zeta_j\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2A_n^2}\sum_{j=1}^n a_j^2\zeta_j^2 + \sum_{j=1}^n O\left(\left|\frac{ta_j\zeta_j}{A_n}\right|^3\right)\right)$$

が得られる.

ここでまず exp(·) が $e^{-t^2/2}$ に確率収束することを示す．exp の中身が $-t^2/2$ に L_2 収束していることを示せば十分である．第二項に着目すれば

$$\sum_{j=1}^{n} O\left(\left|\frac{ta_j\zeta_j}{A_n}\right|^3\right) = \frac{\sqrt{2}|t|}{A_n}\max_{j\le n}|a_j| O\left(\frac{t^2}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\zeta_j^2\right) = o(1)\frac{t^2}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\zeta_j^2$$

であるから，第一項の収束をいえば十分であることがわかる．その第一項と $-t^2/2$ との差は $\frac{t^2}{2A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2(\zeta_j^2-1)$ となり，ここで $i \neq j$ なら

$$\begin{aligned}
E(\zeta_i^2-1)(\zeta_j-1) &= \int_0^1 \cos(4\pi n_i\omega)\cos(4\pi n_j\omega)\,d\omega \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\cos(4\pi(n_i+n_j)\omega)+\cos(4\pi(n_i-n_j)\omega)\right)d\omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

となること，即ち $\{\zeta_i^2-1\}$ が直交列であることと，$|\zeta_i^2-1|\le 1$ であることに注意すれば

$$E\left(\frac{t^2}{2A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2(\zeta_j^2-1)\right)^2 \le \frac{t^2}{4A_n^4}\sum_{j=1}^{n} a_j^4 \le \frac{t^2}{4A_n^4}\max_{j\le n} a_j^2\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = t^4 o(1)$$

が得られ L_2 収束することが解る．

一方

$$E\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{ita_j}{A_n}\zeta_j\right) = 1$$

である．これを以下示そう．Riesz 積の議論であるが，左辺の積を展開して得られる項は定数項の 1 以外は係数と $\zeta_{j_1}\ldots\zeta_{j_r}$ $(j_1 < \cdots < j_r)$ の積になっている．これは

$$\zeta_{j_1}\ldots\zeta_{j_r} = \frac{\sqrt{2}^r}{2^{r-1}}\sum_{\pm,\ldots,\pm}\cos\bigl(2\pi(n_{j_r}\pm\cdots\pm n_{j_1})\omega\bigr)$$

と Fourier 展開される．ここで

$$
\begin{aligned}
n_{j_r} \pm n_{j_{r-1}} \pm \cdots \pm n_{j_1} &\geq n_{j_r} - n_{j_{r-1}} - \cdots - n_{j_1} \\
&\geq n_{j_r} - n_{j_r - 1} - \cdots - n_1 \\
&= n_{j_r}\left(1 - \frac{n_{j_r-1}}{n_{j_r}} - \cdots - \frac{n_1}{n_{j_r}}\right) \\
&\geq n_{j_r}\left(1 - \frac{1}{q} - \cdots - \frac{1}{q^{j_r-1}}\right) \\
&\geq n_{j_r}\left(1 - \frac{1/q}{1-1/q}\right) \\
&\geq n_{j_r}/2
\end{aligned}
$$

であることに注意すれば $E\zeta_{j_1}\ldots\zeta_{j_r} = 0$ が示され，求める式が得られる．この式と

$$
\left|\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{ita_j}{A_n}\zeta_j\right)\right| \leq \exp\left(\frac{t^2}{2A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\zeta_j^2\right) \leq e^{t^2}
$$

を考慮して

$$
\begin{aligned}
\left|\phi_n(t) - e^{-t^2/2}\right| &= \left|\phi_n(t) - e^{-t^2/2} E\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{ita_j}{A_n}\zeta_j\right)\right| \\
&\leq \Bigg| E\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{ita_j}{A_n}\zeta_j\right) \\
&\qquad \times \left(\exp\left(-(1+o(1))\frac{t^2}{2A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\zeta_j^2\right) - e^{-t^2/2}\right)\Bigg| \\
&\leq Ee^{t^2}\left|\exp\left(-(1+o(1))\frac{t^2}{2A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\zeta_j^2\right) - e^{-t^2/2}\right|
\end{aligned}
$$

と評価されるが，被積分函数は有界で 0 に確率収束するので，有界収束定理より $\phi_n(t) \to e^{-t^2/2}$ が従う．以上で $q \geq 3$ の場合は示された．先に進む前に整

理しておくと, 以上の証明で用いた本質的な性質は次の 3 点に集約されることが解る.

(1) 確率変数列 $\{\zeta_j\}$ の有界性.

(2) $\frac{1}{A_n^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2(\zeta_j^2-1) \to 0$ i.p. を導くために用いた $\{\zeta_j^2-1\}$ の直交性.

(3) Riesz 積の議論に用いた $E\zeta_{j_1}\ldots\zeta_{j_r}=0$.

(2) については $\{\zeta_{2j}^2-1\}$ と $\{\zeta_{2j-1}^2-1\}$ が共に直交列という主張 (2') に弱めてもよいことは自明であろう.

このような考察に基づき $q<3$ の場合を考察してみよう. $r\in\mathbf{N}$ を $q^r\geq q/(q-1)$ となるようにとり,

$$d_j^2=\sum_{i=(j-1)r+1}^{jr} a_i^2,\quad D_N^2=d_1^2+\cdots+d_N^2,$$

$$\zeta_j=\frac{1}{d_j}\sum_{i=(j-1)r+1}^{jr} a_i\sqrt{2}\cos(2\pi n_i\omega)$$

と改めて ζ_j を定める. cos 列を r 個ずつ Block して分散で割ったものを考えるのである. このように定めると

$$\frac{1}{A_{Nr}}\sum_{i=1}^{Nr} a_i\sqrt{2}\cos(2\pi n_i\omega)=\frac{1}{D_N}\sum_{j=1}^{N} d_j\zeta_j$$

となるので, ζ_j についての中心極限定理を示せば良いということになる.

$$D_N\to\infty,\quad d_N=o(D_N)\quad \text{as}\quad N\to\infty$$

や $|\zeta_j|\leq r\sqrt{2}$ は容易に導かれる. 更に ζ_j^2-1 を展開してみると

$$\zeta_j^2-1=\frac{1}{d_j^2}\left\{\sum_{i=(j-1)+1}^{jr} a_i^2\cos(4\pi n_i\omega)\right.$$
$$\left.+\sum_{(j-1)r<i_1<i_2\leq jr} a_{i_1}a_{i_2}\cos(2\pi n_{i_1}\omega)\cos(2\pi n_{i_2}\omega)\right.$$

となりその Fourier 展開に現れる周波数は上限は $2n_{jr}$, 下限は

$$n_{i+1} - n_i \geq n_{i+1}\left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq n_{(j-1)+1}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

で評価される. 故に $\zeta_{j+2}^2 - 1$ に現れる最小周波数と, $\zeta_j^2 - 1$ の最大周波数の差は

$$n_{(j+1)r+1}\left(1 - \frac{1}{q}\right) - 2n_{jr} \geq n_{(j+1)r+1}\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{q^{r+1}}\right) > 0$$

と評価されることが解る. これから (2') の性質は成り立っていることが解る. 一方 (3) の性質についても

$$\begin{aligned} & n_{jr+1} - n_{jr} - n_{(j-1)r} - \cdots - n_r \\ & \geq n_{jr+1}\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{q^{r+1}} - \cdots - \frac{1}{q^{(j-1)r-1}}\right) \\ & \geq n_{jr-1}\left(1 - \frac{1}{q}\frac{q^r}{q^r - 1}\right) \\ & > 0 \end{aligned}$$

となるので, やはり成立していることがわかり証明は終結する.

以上 Salem–Zygmund の定理を特別な場合に証明してみたが, 間隙条件を高橋間隙条件

$$n_{j+1}/n_j > 1 + cj^{-\alpha} \qquad (c > 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1/2)$$

に弱めようとすると次のようなことが問題になることが容易に想像されよう. $1 + cj^{-\alpha}$ は $j \to \infty$ として 1 に収束するので, (2'), (3) の条件を保存するためには r は j により大きくしなければならない. それにより $\{\zeta_j\}$ の一様有界性が崩れるので (1) の条件を弱めるための考察が精密に成されなければならない.

高橋間隙条件の下での中心極限定理は Erdős [3] と高橋 [18], [19], [20], [21] によりほぼ独立な形で示されたが, Erdős は Kac の流れを引く証明を数論的技巧的評価を駆使して行っていて, その理解はなかなかに困難である. それに対して高橋の証明は Salem–Zygmund の流れを引くものであって, その技法は他の極限定理の導出にも有力である. 筆者の結果もこの線に沿ったものである. ともかく, この節を締めくくるに当たり高橋の結果を正確に述べておこう.

THEOREM B. 自然数列 $\{n_j\}$ は高橋間隙条件

$$n_{j+1}/n_j > 1 + cj^{-\alpha} \quad (c > 0,\, 0 \le \alpha \le 1/2)$$

をみたすとし, Ω は $[0,1]$ の Lebesgue 測度正の部分集合とする. また実数列 $\{a_j\}$ について

$$A_n^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \to \infty, \quad a_n = o(n^{-\alpha} A_n) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

が成立しているものとする. このとき $\{\sqrt{2}\cos(2\pi n_j \omega)\}$ を $(\Omega, d\omega/|\Omega|)$ の確率変数列と考えて中心極限定理が成立する.

3. Multiplicative Systems について

2 節に於て注意した通り $\{\xi_i\}$ の一様有界性と $\{\xi_i^2 - 1\}$ の直交性及び

$$E\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r} = 0 \qquad (r \in \mathbf{N},\, i_1 < \cdots < i_r)$$

という条件の下で中心極限定理は成立するのであった. 一般にこの 3 番目の条件をみたす確率変数列のことを Multiplicative Systems (MS) と呼ぶが, これについては様々な条件を付加した上で確率論的考察がなされている. この概念を用いれば前の Salem–Zygmund の定理は, $\{\sqrt{2}\cos 2\pi n_j \omega\}$ は Lebesgue 測度の下で一様有界 MS で付加的な条件もみたされるので中心極限定理を成りたたしめる, という形に整理できる. MS の概念が Salem–Zygmund の証明を抽象化したものである以上, この整理の仕方は単なる Abstract Nonsense のお遊びに過ぎないこととなるが, MS それ自体は自然な概念である以上この方面の研究を十分押し進めた上で間隙級数への応用を考えれば, 新たな結果が得られることも期待できる. 本稿の結果はその典型例ということになる.

研究の方向としては一様有界性を弱めることの外に次のようなものがあった. MS においては $E\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r} = 0$ が exact に 0 に等しいことを要求しているが, 少なくとも前出の Riesz 積の平均が 1 に収束しさえすれば良いのだから, ある意味で nealy 0 であれば良いことになる. この様にして作られた概念が Weakly Multiplicative Systems (WMS) であるが, nearly 0 の定式化の方法により様々な定義が可能であり, 歴史的にも variation が多い. それを全て羅列するのは労多くして功少なき作業であるので Móricz [10], [11] の

Historical Comments を引用するにとどめて, 敢えて我田引水して筆者 [4] の WMS に対する平均中心極限定理を述べてみよう. まず記号を準備する. まず

$$b_{i_1,\dots,i_r} = E(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_r}), \quad \overline{b}_{i_1,\dots,i_r} = E((\xi_{2i_1-1}^2-1)\dots(\xi_{2i_r-1}^2-1)),$$
$$\overline{\overline{b}}_{i_1,\dots,i_r} = E((\xi_{2i_1}^2-1)\dots(\xi_{2i_r}^2-1))$$

とおき, 無限次元 vector B_r, $\overline{B}_r$ および $\overline{\overline{B}}_r$ を

$$B_r = (b_{i_1,\dots,i_r})_{i_1<\dots<i_r}, \quad \overline{B}_r = (\overline{b}_{i_1,\dots,i_r})_{i_1<\dots<i_r}, \quad \overline{\overline{B}}_r = (\overline{\overline{b}}_{i_1,\dots,i_r})_{i_1<\dots<i_r}$$

と定める. そして $\|B_r\|_\delta, \|\overline{B}_r\|_\delta$ および $\|\overline{\overline{B}}_r\|_\delta$ はこれらの vector の l_δ−norm とする. 例えば

$$\|B_r\|_\delta = \left(\sum_{i_1<\dots<i_r} |b_{i_1,\dots,i_r}|^\delta\right)^{1/\delta}.$$

ここでは $\{\xi_i\}$ は次の評価をみたすという意味で WMS であるということとする.

$$\|B_r\|_\delta^{1/r} \le Br^{1-1/\delta}, \quad \|\overline{B}_r\|_2^{1/r} \le Br^{1/2}, \quad \|\overline{\overline{B}}_r\|_2^{1/r} \le Br^{1/2} \quad (r \in \mathbf{N}).$$

THEOREM 13. $\{\xi_i\}$ は上の意味で WMS であるとし, 実数列 $\{\lambda_i\}$ と正数 λ は

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = 1 \quad |\lambda_i| \le B\lambda, \quad \lambda \le 1 \qquad (i \in \mathbf{N}),$$
$$|\lambda_i \xi_i| \le B\lambda \qquad (i \in \mathbf{N})$$

をある $\delta \in [1,2)$ とある $B \ge 1$ についてみたすとする. このとき級数 $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i$ は確率収束してその分布函数 F と標準正規分布函数 G との間の L_∞-norm と L_1-norm は次のように評価される.

$$\|F-G\|_\infty \le LB^2\lambda^{(1/4)\wedge(2\Delta/3)}, \qquad \|F-G\|_1 \le LB^3\lambda^{(2/7)\wedge(4\Delta/5)}.$$

ここで L は絶対定数で, また $\Delta = 2/\delta - 1$ である.

この定理は極限定理の形をしていないが, これより中心極限定理は以下のようにして導かれる. 例えば

$$\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j \to N_{0,1} \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

を示したいとする.

$$\lambda_j = \begin{cases} a_j/A_n & j \le n \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

とおくと

$$\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j, \quad \lambda = \max_{j\le n}|a_j|/A_n$$

となり, $A_n \to \infty$, $a_n = o(A_n)$ である限りに於て $\|F - G\|_\infty$ の評価より求めることが得られる.

WMS の仮定の下での中心極限定理の証明を全て述べるには紙面が足りないので, もっとも典型的な Riesz 積の収束のみ示すことにしよう. 以下の Lemma で得られている, その収束の Order も実は証明中で重要な役割を演ずることを付記しておく.

Lemma 14. $|t| \le (8B^2\lambda^\Delta)^{-1}$, $p < \infty$ ならば

$$\left| E\prod_{i=1}^{p}\left(1 + \sqrt{-1}t\lambda_i\xi_i\right) - 1 \right| \le CB^2\lambda^\Delta|t|.$$

(証明) Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} &\left| E\prod_{i=1}^{p}\left(1 + \sqrt{-1}t\lambda_i\xi_i\right) - 1 \right| \\ &\qquad \le \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i_1<\cdots<i_r}|t|^r|\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}||b_{i_1,\ldots,i_r}| \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{r=1}^{\infty}|2Btr^{1/\epsilon}|^{r\epsilon}\sum_{i_1<\cdots<i_r}|\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}|^{\epsilon}\right)^{1/\epsilon}$$
$$\times\left(\sum_{r=1}^{\infty}|2Br^{1/\epsilon}|^{-r\delta}\sum_{i_1<\cdots<i_r}|b_{i_1,\ldots,i_r}|^{\delta}\right)^{1/\delta}$$
$$\leq \left(\sum_{r=1}^{\infty}|2B^2tr^{1/\epsilon}\lambda^{\Delta}|^{r\epsilon}\sum_{i_1<\cdots<i_r}\lambda_{i_1}^2\ldots\lambda_{i_r}^2\right)^{1/\epsilon}$$
$$\times\left(\sum_{r=1}^{\infty}(2Br^{1/\epsilon}\|B_r\|_{\delta}^{-1/r})^{-r\delta}\right)^{1/\delta}.$$

ここで, 次の事実を使う.

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}\lambda_{i_1}^2\ldots\lambda_{i_r}^2 \leq \frac{1}{r!}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \\ \text{は互いに異なる}}}\lambda_{i_1}^2\ldots\lambda_{i_r}^2 \leq \frac{1}{r!} \leq \left(\frac{e}{r}\right)^r$$

このことから

$$\left|E\prod_{i=1}^{p}\left(1+\sqrt{-1}t\lambda_i\xi_i\right)-1\right|$$

$$\leq \left(\sum_{r=1}^{\infty}|4B^2t\lambda^{\Delta}|^{r\epsilon}\right)^{1/\epsilon}\left(\sum_{r=1}^{\infty}2^{-r\delta}\right)^{1/\delta}.$$

あとは $|t| \leq (8B^2\lambda^{\Delta})^{-1}$ に注意すれば, 求める評価を得る.

更に条件を少し付け加えると, 重複対数の法則をも示すことができるが, これについては 5 節でまとめて述べることとしよう.

4. 条件 (H) または (D) の下での定理の証明

この節では (H) を仮定した場合の証明の方針についてまず述べる. 定理 2 を Hadamard 間隙条件 $q > 3$ のときに示すことにする. これは結局高橋 [24] の結果であるが, この上に blocking technique を乗せたものが定理 2 の証明であると想像して欲しい.

証明の大方針は, $\xi_j = \sqrt{2}\cos(\beta_j t\omega + \gamma_j)$ として $\{\xi_j\}$ が a.e. t について定理 13 の条件をみたす, 即ち WMS になることを示す, というものである.

まず高橋 [24] の Lemma を引用する.

Lemma C. (H) の下では

$$\int_v^{v+1} |\widehat{P}(ut)|\, dt \le D|u|^{-\rho/2} \quad (u, v \in \mathbf{R})$$

が成立. ここで D は ρ にのみ依存する定数である.

WMS であることを示すために $b_{i_1,\ldots,i_r}$ の評価をする.

$$b_{i_1,\ldots,i_r} = \frac{\sqrt{2}^r}{2^{r-1}} \sum_{\pm,\ldots,\pm} E\cos\left((\beta_{i_r} \pm \cdots \pm \beta_{i_1})t\omega + (\gamma_{i_r} \pm \cdots \pm \gamma_{i_1})\right)$$

である. ここで Salem–Zygmund の定理の証明と同様に

$$\beta_{i_r} \pm \cdots \pm \beta_{i_1} \ge \beta_{j_r}/2 \ge 3^{j_r}/2$$

が導かれるので $|E\cos(\beta t\omega + \gamma)| \le |\widehat{P}(\beta t)|$ を用いれば,

$$|b_{i_1,\ldots,i_r}| \le |\widehat{P}(3^{i_r}t/2)|$$

となるので, Lemma より

$$\int_v^{v+1} |b_{i_1,\ldots,i_r}|\, dt \le \sqrt{2}^r \int_v^{v+1} |\widehat{P}(3^{i_r}t/2)| \le \sqrt{2}^r D(3^{i_r}/2)^{-\rho i_r/2}.$$

それ故

$$\int_v^{v+1} \|B_r\|_1\, dt \le \sqrt{2}^r D \sum_{i_1<\cdots<i_r} 3^{-\rho i_r/2} \le \frac{\sqrt{2}^r D}{(r-1)!} \sum_{i_r=1}^{\infty} i_r^{r-1} 3^{-\rho i_r/2} \le (D')^r$$

を得る. $\|\overline{B}_r\|_1$, $\|\overline{\overline{B}}_r\|_1$ についての評価も同様になされて結局それらより

$$\int_v^{v+1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2D')^r} \left\{ \|B_r\|_1 + \|\overline{B}_r\|_1 + \|\overline{\overline{B}}_r\|_1 \right\} dt \le 3$$

が得られる. 故に a.e. $t \in [v, v+1]$ について

$$\|B_r\|_1,\ \|\overline{B}_r\|_1,\ \|\overline{\overline{B}}_r\|_1 \leq C(2D')^r$$

が成立する. これが求める評価であった. 条件 (D) の下では最初から $\widehat{P}$ の decay が与えられているので積分をする必要が無いという違い以外は全く同じである.

5. 重複対数の法則

Lebesgue 測度の下での間隙三角級数の重複対数の法則は Weiss により Hadamard 間隙条件の下で証明され, 高橋間隙条件の下では高橋が示した. 高橋の方法は MS の議論を一部用いたもので我々はその路線を更に徹底して踏襲する. 即ち, まず WMS についての重複対数の法則を示した上で, (H) または (D) の下での結果を前と同様にそれに帰着する形で証明する. 我々の WMS についての定理は以下の通りである.

まず記号を導入する.

$$\begin{aligned} b^{*}_{k;i_1,\dots,i_r} &= E\left(\xi_{2i_1-1}\cdots(\xi^2_{2i_k-1}-1)\cdots\xi_{2i_r-1}\right), \\ b^{**}_{k;i_1,\dots,i_r} &= E\left(\xi_{2i_1}\cdots(\xi^2_{2i_k}-1)\cdots\xi_{2i_r}\right) \end{aligned}$$

とし B^*_r, B^{**}_r は無限次元 vector で

$$B^*_r = \left(b^*_{k;i_1,\dots,i_r}\right)_{1\leq k\leq r,\, i_1<\dots<i_r}, \quad B^{**}_r = \left(b^{**}_{k;i_1,\dots,i_r}\right)_{1\leq k\leq r,\, i_1<\dots<i_r}$$

と与えられるものとする.

THEOREM 15. 確率変数列 $\{\xi_i\}$ と実数列 $\{c_i\}$ は

$$\begin{aligned} & \|B_r\|_\delta^{1/r} = O(r^{1-1/\delta}) \quad \text{as} \quad r\to\infty \quad \text{for some} \quad \delta\in[1,2), \\ & \|\overline{B}_r\|_2^{1/r},\ \|\overline{\overline{B}}_r\|_2^{1/r} = O(r^{1/2}) \quad \text{as} \quad r\to\infty \\ (*) \qquad & \|B^*_3\|_2,\ \|B^{**}_3\|_2 < \infty, \\ & C_n^2 = c_1^2+\cdots+c_n^2 \to \infty, \\ & c_n,\ c_n\|\xi_n\|_\infty = O\left(C_n(\log C_n)^{-(8\vee\frac{4}{\Delta})}\right) \end{aligned}$$

をみたすとする．このとき次の重複対数の法則が成り立つ．

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2C_n^2 \log\log C_n}} \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i = 1 \quad \text{a.s.}$$

この結果は実は函数型の定理に拡張できる．WMS に対する重複対数の法則は Berkes が

$$c_i = 1, \qquad \|\xi_i\|_\infty \le B \ (i \in \mathbf{N}), \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \|B_r\|_1 < \infty, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \|B'_r\|_1 < \infty.$$

という強い条件の下で示した．筆者はこの結果を

$$\begin{aligned} &c_n = o(C_n^{1-\epsilon}) \quad \text{as} \quad n \to \infty, \qquad \|\xi_i\|_\infty \le B \ (i \in \mathbf{N}), \\ &\|B_r\|_\delta^{1/r} \le B, \quad \|B'_r\|_2^{1/r} \le B \ (r \in \mathbf{N}) \quad \text{for some } \delta \in [1,2) \text{ and } \epsilon > 0 \end{aligned}$$

の場合に拡張した．上記の定理は (*) という余計な条件を仮定しているので，これらの拡張にはなっていないが，次のような version も証明することが出来，これは上記 2 定理の完全な拡張になっている．

THEOREM 16. 定理 16 は条件 (*) を次の条件に取り替えても成り立つ．

$$E\xi_n^4 \le B \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

この定理の証明の方法を簡単に述べよう．一般に同分布独立確率変数列 $\{X_i\}$ に対する重複対数の法則を示す古典的な方法は次のようなものであろう．以下 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とする．

(1) $\theta > 1$ とし S_{θ^n} に対する重複対数の法則の上からの評価を示す．

(2) 和 S_n についての maximal inequality (鏡像の原理) を用いて S_n の max は S_{θ^n} の max に支配されることを示して，S_n についての上からの評価を示す．

(3) S_n の分布の Gauss 近似の order を調べ $\theta \to \infty$ として S_{θ^n} が下からの評価にしたがうことを Borel–Cantelli の第 2 Lemma により示す．

(1) については $E\exp(tS_n)$ の評価に懸かっている．これについての古典的な結果としては吾妻 [1] のものが最も強力でかつ Simple である．即ち

Lemma D. $\{\xi_n\}$ を一様有界 ($|\xi_n| \le K$) MS とし $\{a_n\}$ は実数列とする. $A_n^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$, $S_n = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ とおく. このとき

$$E\left(\exp\{\lambda S_n\}\right) \le \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 A_n^2 K^2\right)$$

が成立しこれより

$$P\left(|S_i| \ge yKA_i\sqrt{2}\right) \le 2e^{-y^2} \qquad \forall y \ge 0, \forall i \in \mathbf{N}$$

が導かれる.

但しこれの仮定は我々の目的には強すぎるのでこれより弱い結果を別な方法で証明して用いる.

(2) の maximal inequality については Móricz[12] の結果が強力である.

Lemma E. $\{\zeta_j\}$ は確率変数列とし

$$E(\zeta_j^2) = \sigma_j^2, \quad S(b,m) = \sum_{j=b+1}^{b+m} \zeta_j, \quad M(b,m) = \max_{j \le m} |S(b,m)| \quad \text{and}$$

$$g(b,m) = A\sum_{j=b+1}^{b+m} \sigma_j^2.$$

と記号を定める. もし

$$P\{|S(b,m)| \ge \lambda\} \le C\exp\left(-\frac{\lambda^2}{g(b,m)}\right) \quad {}^\forall\lambda,\ {}^\forall b, m \in \mathbf{N}.$$

が成り立っているならばある定数 C_1 に対して,

$$P\{M(b,m) \ge \lambda\} \le C_1 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2g(b,m)}\right) \quad {}^\forall\lambda$$

が成り立つ.

これの元になった不等式は Billingsley [2] の中に見いだされる. その不等式とこの Móricz の不等式を合わせて使う.

(3) については我々は独立性を仮定していないので, 独立性を要しない Borel–Cantelli の Lemma の拡張を用いる. (Rényi [14] 参照)

LEMMA F. $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ if

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \quad \text{and} \quad \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right)^2 = 1.$$

これを用いるためには2次元の分布函数の近似が必要となるので, 2次元の特性函数の近似を平均中心極限定理の証明の副産物として示し, Sadikova [16] の Berry–Esseen の不等式の拡張を用いることとなる. この方法は Révész [15] で初めて用いられた.

6. Gap Series について

f を Fourier 近似することにより Hadamard 間隙三角級数列の場合に帰着する. その近似が微妙で面白いのだが紙幅と気力と時間が共に尽きたので残念ながらまたの機会ということにしたい.

REFERENCES

[1] K.Azuma, *Weighted sums of certain dependent random variables*, Tôhoku Math. J. II Ser. **19** (1967), 357–367.

[2] P.Billingsley, "Convergence of probability measures," J.Wiley, New York, 1968.

[3] P.Erdős, *On trigonometric sums with gaps*, Magyar Tud. Acad. Mat. Kut. Int. Közl **7** (1962), 37–42.

[4] K.Fukuyama, *A mean central limit theorem for weakly multiplicative systems and its application to lacunary trigonometric series*, Probab. Theory Related Fields (1991),.

[5] ———, *Functional law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric and some gap series*, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

[6] ———, *On the central limit theorem for some gap series*, (submitted), Proc. 6-th USSR-Japam Symp. in Prob. and Statis..

[7] M.Kac, *Probability methods in some problems of analysis and number theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 641–665.

[8] R.Kaufman, *A problem on lacunary series*, Acta Sci. Math. **29** (1968), 313–316.

[9] R.Kershner, *On singular Fourier–Stieltjes transforms*, Am. J. Math. **58** (1936), 450–452.

[10] F.Móricz, *The law of the iterated logarithm and related results for weakly multiplicative systems*, Anal. Math. **2** (1976), 211–229.

[11] F.Móricz, *On the convergence properties of weakly multiplicative systems*, Acta Sci. Math. Szeged **38** (1976), 127–144.

[12] F.Móricz, *Exponential estimates for the maximum of partial sums. I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **33** (1979), 159–167.

[13] F.Móricz–P.Révész, *Multiplikatíve rendszerek*, Mat. Lapok **28** (1980), 43–63.

[14] A.Rényi, "Probability theory," Académiai Kiadó, 1970.

[15] P.Révész, *A new law of the iterated logarithm for multiplicative systems*, Acta Sci. Math. (Szeged) **34** (1973), 557–564.

[16] S.M.Sadikova, *On two dimensional analogue of Esseen with application to the central limit theorem*, Theor. Probab. Appl. **11** (1966), 325–335.

[17] R.Salem–A.Zygmund, *On lacunary trigonometric series*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33** (1947), 333–338.

[18] S. Takahashi, *Central limit theorem for trigonometric series*, Tôhoku Math. J. II Ser. **16** (1964), 1–14.

[19] ————, *A version of the central limit theorem for trigonometric series*, Tôhoku Math. J. II Ser. **16** (1964), 384–398.

[20] ————, *On the central limit theorem for lacunary trigonometric series*, Proc. Japan Acad. **41** (1965), 503–506.

[21] ————, *On trigonometric series with gaps*, Tôhoku Math. J. II Ser. **17** (1965), 227–234.

[22] ————, *The law of the iterated logarithm for a gap sequence with infinite gaps*, Tôhoku Math. J. , II Ser. **15** (1963), 281–288.

[23] ————, *A gap sequence with gaps bigger than the Hadamard's*, Tôhoku Math. J. , II Ser. **13** (1961), 105–111.

[24] ————, *Lacunary trigonometric series and probability*, Tôhoku Math. J. , II Ser. **22** (1970), 502–510.

[25] ————, *On the law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series*, Tôhoku Math. J. , II Ser. **24** (1972), 319–329.

[26] ————, *On the law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series II*, Tôhoku Math. J. , II Ser. **27** (1975), 391–403.

[27] ————, *Almost sure invariance principles for lacunary trigonometric series*, Tôhoku Math. J. , II Ser. **31** (1979), 439–451.

[28] ————, *Lacunary trigonometric series and some probability measures*, Math. Jap. **35** (1990), 73–77.

[29] N.Wiener–A.Wintner, *On singular distributions*, J. Math. Phys. **17** (1938), 233–246.
[30] N.Wiener–A.Wintner, *Fourier–Stieltjes transform and singular infinite convolutions*, Amer. J. Math. **40** (1938), 513–522.